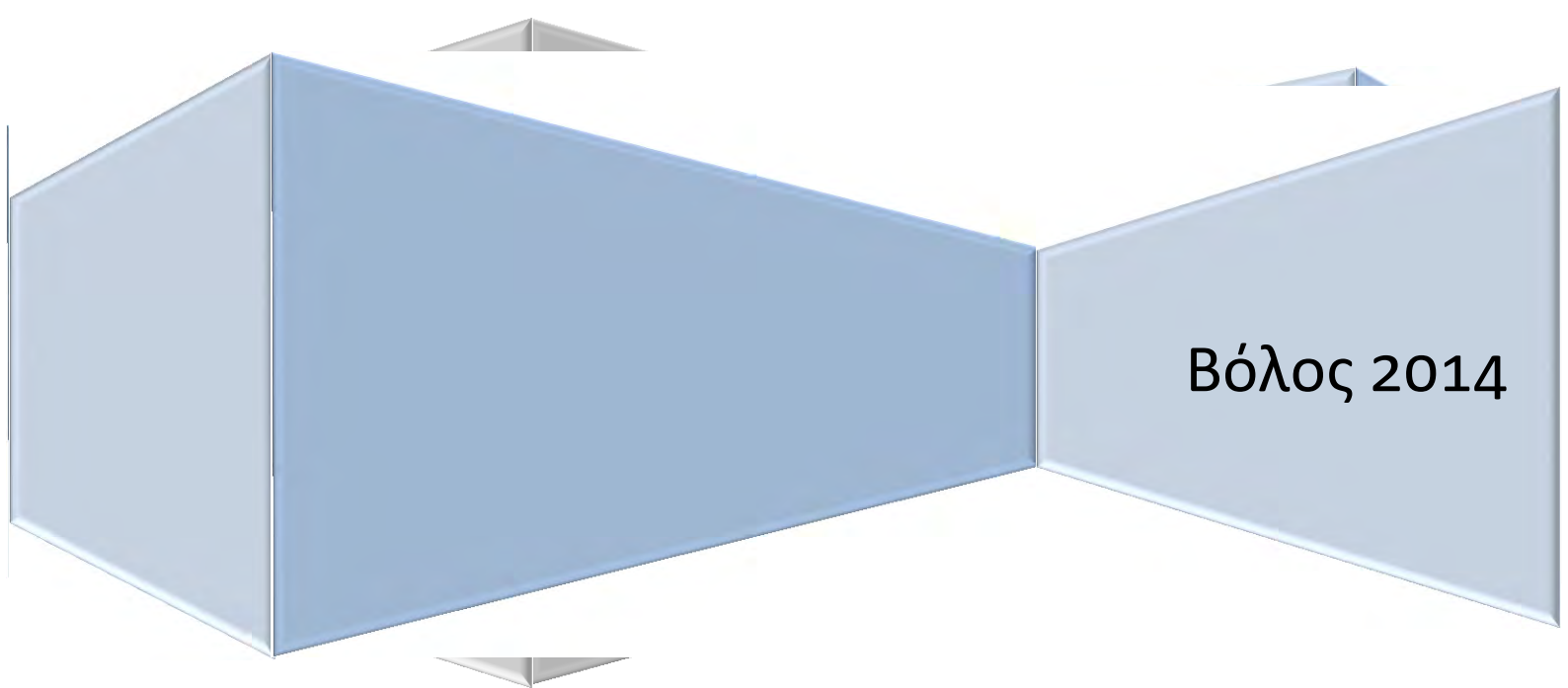


Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Τμήμα Οικονομικών Επιστημών
Π.Μ.Σ. «Εφαρμοσμένα Οικονομικά»

Εμπειρική μελέτη διάφορων μη- γραμμικών υποδειγμάτων χρονολογικών σειρών

Διονύσης Καπούλας



Βόλος 2014

**Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Τμήμα οικονομικών Επιστημών
Π.Μ.Σ. «Εφαρμοσμένα Οικονομικά»**

**Διπλωματική Εργασία:
Εμπειρική μελέτη διάφορων μη-γραμμικών υποδειγμάτων
χρονολογικών σειρών**

Φοιτητής: Καπούλας Διονύσης
Εισηγητής: Κα. Αναγνώστου Αγγελική

Βόλος Φεβρουάριος 2014

Περιεχόμενα

1. Πρόλογος	Σελ. 4
2. Βασική Θεωρία Χρονολογικών Σειρών	Σελ. 6
3. Θεωρία Αποδοτικών αγορών και η αποτυχία των γραμμικών μοντέλων	Σελ. 12
4. Ανιχνεύοντας τη μη-γραμμικότητα και το BDS test.....	Σελ. 15
5. Μη-γραμμικά μοντέλα χρονολογικών σειρών	Σελ. 18
6. Θεωρία του Χάους.....	Σελ. 23
7. Εμπειρική εφαρμογή μη-γραμμικών μοντέλων	Σελ. 25
8. Πρόβλεψη	Σελ. 33
9. Συμπεράσματα	Σελ. 35

1. Πρόλογος

Τις τελευταίες δεκαετίες έχει παρατηρηθεί ραγδαία εξέλιξη της οικονομετρίας. Ο όρος είναι «οικονομετρία» είναι μια σύνθετη λέξη που αποτελείται από τις λέξεις «οικονομία» και «μετρώ». Δηλαδή η οικονομετρία αποτελεί το εργαλείο του σύγχρονου οικονομολόγου που προσπαθεί να μετρήσει τα διάφορα οικονομικά φαινόμενα. Να εκφράσει δηλαδή τις ποσοτικές σχέσεις που διέπουν τα φαινόμενα αυτά χρησιμοποιώντας στατιστικά και μαθηματικά εργαλεία, εξετάζοντας ταυτόχρονα και κατά πόσο οι οικονομικές θεωρίες είναι ορθές.

Άλλο σημαντικό εργαλείο που μας προσφέρει η οικονομετρία μέσα από την έκφραση των ποσοτικών σχέσεων των διάφορων οικονομικών φαινομένων είναι η πρόβλεψη. Πάντα ο άνθρωπος, ζώντας σε ένα περιβάλλον αβεβαιότητας, προσπαθούσε να προβλέψει το μέλλον για όλες τις πτυχές της ζωής του. Τα οικονομικά δεν αποτελούν εξαίρεση. Με τον όρο «πρόβλεψη» στα οικονομικά εννοούμε την χρησιμοποίηση ιστορικών δεδομένων για να καθορίσουμε την πορεία μελλοντικών αποφάσεων. Η πρόβλεψη χρησιμοποιείται από εταιρείες για να καθορίσουν πως θα χρησιμοποιήσουν τα κεφάλαιά τους σε μια μελλοντική περίοδο. Οι πληροφορίες που μπορούν να πάρουν αποτελούν κρίσιμη εισροή για τις διοικητικές και διαχειριστικές αποφάσεις που παίρνουν, αφού τέτοιες αποφάσεις εξαρτώνται από μελλοντικές προσδοκίες.

Οι τύποι δεδομένων που χρησιμοποιούνται είναι οι εξής:

- i) Διαστρωματικά δεδομένα, τα οποία είναι τυχαία στατιστικά δεδομένα τα οποία αφορούν μια ή περισσότερες μεταβλητές σε κάποια συγκεκριμένη χρονολογική στιγμή
- ii) Χρονολογικές σειρές, τα οποία είναι δεδομένα μιας μεταβλητής κατά τη διάρκεια μια χρονολογικής περιόδου
- iii) Στοιχεία Πάνελ, τα οποία αποτελούν ένα συνδυασμό των 2 παραπάνω κατηγοριών

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω δεδομένα οι οικονομέτρες προσπαθούν να δημιουργήσουν μια μαθηματική σχέση, ή αλλιώς ένα υπόδειγμα, το οποίο θα συνδέει δύο ή περισσότερες μεταβλητές μεταξύ τους. Στο αριστερό σκέλος αυτής της σχέσης είναι η εξαρτημένη μεταβλητή, δηλαδή η μεταβλητή που θέλουμε να εξετάσουμε τη συμπεριφορά της και στο δεξιό σκέλος έχουμε τις ανεξάρτητες μεταβλητές, ή διαφορετικά τις ερμηνευτικές μεταβλητές, τις οποίες θεωρούμε ότι επηρεάζουν τη συμπεριφορά της εξαρτημένης. Τέτοια υποδείγματα λέγονται πολυμεταβλητά (multivariate) υποδείγματα. Υπάρχει περίπτωση όμως να χρησιμοποιούμε σαν ερμηνευτική μεταβλητή την ίδια την εξαρτημένη με υστερήσεις. Τότε έχουμε μονομεταβλητά (univariate) υποδείγματα.

Στην συγκεκριμένη εργασία θα εξετασθούν χρονολογικές σειρές, τις οποίες θα προσπαθήσουμε να ερμηνεύσουμε χρησιμοποιώντας μονομεταβλητά υποδείγματα. Πιο συγκεκριμένα θα εξετάσουμε χρηματοοικονομικές σειρές, όπως μετοχές και ισοτιμίες. Εδώ και πολλά χρόνια τέτοιες χρηματοοικονομικές σειρές ερμηνεύονταν χρησιμοποιώντας γραμμικά μοντέλα, με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, όπως πρότεινε η θεωρία αποδοτικών αποδόσεων. Όπως θα δούμε όμως τέτοιες χρηματοοικονομικές σειρές παρουσιάζουν κάποια χαρακτηριστικά τα οποία δεν μπορούν να ερμηνευτούν από τα γραμμικά μοντέλα και τη θεωρία αποδοτικών αποδόσεων. Έτσι δημιουργήθηκε η ανάγκη για χρησιμοποίηση μη-γραμμικών μοντέλων τα οποία θα μπορούν να εντοπίσουν και να ερμηνεύσουν τέτοια χαρακτηριστικά. Ο σκοπός αυτής της εργασίας είναι να μελετήσει εμπειρικά τέτοια μοντέλα, χρησιμοποιώντας τα πάνω σε έξι διαφορετικές χρηματοοικονομικές μεταβλητές. Πριν περάσουμε όμως στα μη-γραμμικά μοντέλα αξίζει να υπενθυμίσουμε τη βασική θεωρία των χρονολογικών σειρών.

2. Βασική θεωρία χρονολογικών σειρών

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως μια χρονολογική σειρά είναι οι διαφορετικές τιμές που παίρνει μια μεταβλητή κατά τη διάρκεια μιας χρονικής περιόδου, παρατηρημένες πάντα με την ίδια συχνότητα (π.χ. ημερησίως, μηνιαίως κλπ.).

Μπορούμε να γράψουμε μια χρονολογική σειρά ως

$$\{y_t\} \text{ όπου } t = 0, 1, 2, \dots, T$$

Όταν τα δεδομένα μας είναι διαστρωματικά στοιχεία έχουμε περισσότερες από μία μεταβλητές και προσπαθούμε να μοντελοποιήσουμε τη σχέση μεταξύ τους χρησιμοποιούμε την μία από αυτές σαν εξαρτημένη μεταβλητή και τις υπόλοιπες ως ανεξάρτητες (ερμηνευτικές) μεταβλητές. Προσπαθούμε δηλαδή να δημιουργήσουμε πολυμεταβλητά υποδείγματα (multivariate).

Αντίθετα στις χρονολογικές σειρές η μεταβλητή μας είναι μόνο μία, αυτή που θέλουμε να εξετάσουμε. Προσπαθούμε δηλαδή να δημιουργήσουμε μονομεταβλητά υποδείγματα (univariate). Ένα κλασικό υπόδειγμα χρονολογικών σειρών είναι το υπόδειγμα του τυχαίου περιπάτου (random walk). Αυτό εκφράζεται ως:

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t, \text{ όπου } \varepsilon_t \sim \text{i.i.d. } N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

Επίσης όταν το παραπάνω υπόδειγμα έχει σταθερό όρο τότε εκφράζεται ως:

$$y_t = \mu + y_{t-1} + \varepsilon_t, \text{ όπου } \varepsilon_t \sim \text{i.i.d. } N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

Το υπόδειγμα αυτό ονομάζεται τυχαίος περίπατος με περιπλάνηση (random walk with drift).

Στα παραπάνω υποδείγματα το ε_t ονομάζεται λευκός θόρυβος (white noise) και η διαδικασία αυτή υποθέτει ότι οι τιμές είναι κατανομημένες στο χρόνο κανονικά, τυχαία και ανεξάρτητες μεταξύ τους (independently and identically distributed, i.i.d.). συγκεκριμένα οι τρεις υποθέσεις είναι:

- 1) $E(\varepsilon_t) = 0$
- 2) $E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) = \text{cov}(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) = 0$
- 3) $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$

Οι δυο πρώτες υποθέσεις, υποθέτουν ότι δεν υπάρχει γραμμική συσχέτιση μεταξύ των τιμών και η τρίτη υποθέτει υπό-συνθήκη ομοσκεδαστικότητα. συμπεραίνουμε ότι τα παραπάνω υποδείγματα αποδέχονται αυτομάτως το «δόγμα της σταθερότητας». Το δόγμα αυτό αναφέρεται στη σταθερότητα των μέσων και των διακυμάνσεων και την μη εξάρτησή τους από το χρόνο. Δυστυχώς η εμπειρική έρευνα έχει αποδείξει ότι τις περισσότερες φορές οι χρονολογικές σειρές δεν ικανοποιούν το δόγμα της σταθερότητας. Επομένως δεν ισχύουν οι κλασικοί έλεγχοι, όπως αυτοί του t και του F , οι οποίοι βασίζονται σε μεθόδους εκτίμησης που λαμβάνουν υπόψη τους το δόγμα της σταθερότητας, ή με άλλα λόγια που υποθέτουν, χωρίς καμιά επιβεβαίωση, ότι οι μεταβλητές που υπεισέρχονται σε μια εκτίμηση είναι «στάσιμες», με αποτέλεσμα να οδηγούν σε παραπλανητικά συμπεράσματα. Αυτό είναι γνωστό ως το πρόβλημα της «φαινομενικής παλινδρομήσεως». (Κάτος, 2004). Γι αυτό ανατήχθηκαν μέθοδοι που εξετάζουν το παραπάνω πρόβλημα δηλαδή της μη στασιμότητας των μεταβλητών.¹

Στασιμότητα

Όταν λέμε ότι μια χρονολογική σειρά είναι στάσιμη εννοούμε ότι ο μέσος της και η διακύμανσή της δεν αλλάζουν μέσα στο χρόνο. Δηλαδή η χρονολογική μας σειρά δεν έχει τάση, είτε ανοδική είτε καθοδική, και δεν παρουσιάζει περιοδικές αυξομειώσεις (εποχικότητα). Εάν η χρονολογική μας σειρά είναι μη-στάσιμη μπορούμε να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα αυτό με τους εξής τρόπους:

α) Κάνοντας μετασχηματισμούς διαφορών. Παίρνοντας δηλαδή τις πρώτες διαφορές της χρονολογικής σειράς απαλείφοντας έτσι την γραμμική τάση:

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$$

Εάν μετά από αυτήν την τροποποίηση η χρονολογική σειρά συνεχίζει να είναι μη-στάσιμη μπορούμε να πάρουμε και τις δεύτερες, τρίτες... διαφορές μέχρι να απαλειφθεί το πρόβλημα

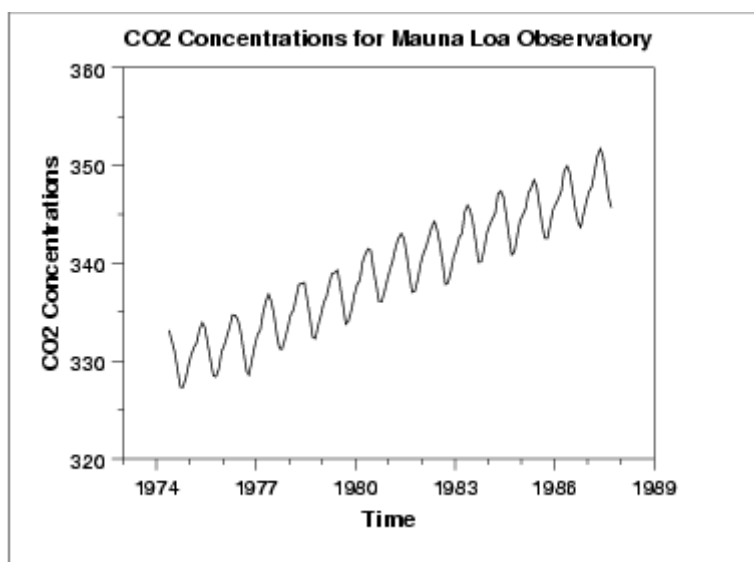
β) Κάνοντας λογαριθμικούς μετασχηματισμούς που απαλείφουν την εκθετική τάση:

$$W_t = \log(Y_t)$$

γ) Συνδυασμός και των δύο. Παίρνοντας δηλαδή τις πρώτες, δεύτερες, τρίτες... διαφορές των λογαρίθμων:

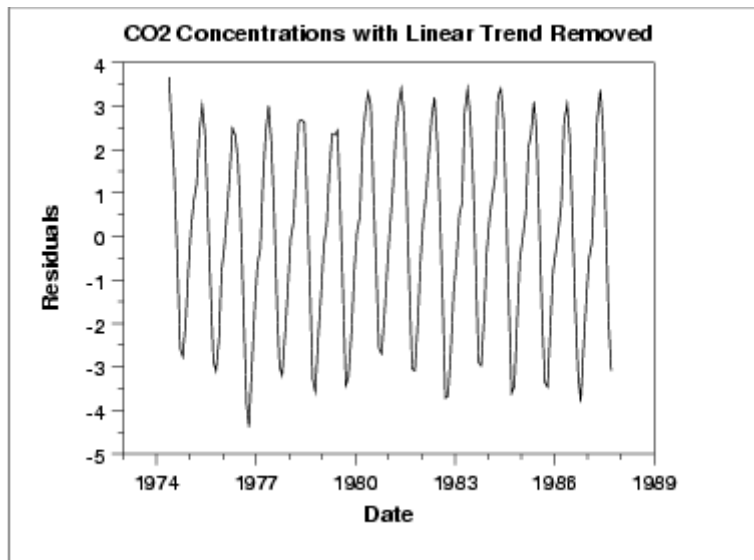
$$W_t = \Delta(\log Y_t) = \log Y_t - \log Y_{t-1}$$

Όταν η Y_t είναι μια μη-στάσιμη χρονολογική σειρά, ενώ η ΔY_t είναι τότε λέμε ότι η Y_t είναι ολοκληρωμένη πρώτης τάξεως ολοκληρωμένη ή ότι έχει μια μοναδιαία ρίζα, που το συμβολίζουμε με $I(1)$, και ότι διαφοροποιήθηκε μια φορά για να γίνει στάσιμη. Πιο γενικευμένα εάν χρειάστηκε να διαφοροποιηθεί d φορές για να γίνει στάσιμη τότε λέμε ότι είναι ολοκληρωμένη d τάξεως ή ότι έχει d μοναδιαίες ρίζες και συμβολίζεται με $I(d)$. Ένα παράδειγμα μη στάσιμης χρονολογικής σειράς παρουσιάζεται στο Γράφημα 1.



Γράφημα 1

Στο Γράφημα 2 βλέπουμε τις πρώτες διαφορές αυτής της χρονολογικής σειράς και πως αυτή είναι πλέον στάσιμη.



Γράφημα 2

Υπάρχουν αρκετοί τρόποι για να ελέγξουμε τη στασιμότητα μιας χρονολογικής σειράς:

- Μπορούμε να μελετήσουμε την γραφική απεικόνισή της,
- Να κατασκευάσουμε και να μελετήσουμε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης και το αντίστοιχο κορρελόγραμμα της
- Να κάνουμε στατιστικούς ελέγχους για τον συντελεστή αυτοσυσχέτισης, όπως για παράδειγμα χρησιμοποιώντας το Ljung–Box Q test.
- Πραγματοποιώντας ελέγχους για μοναδιαία ρίζες, όπως το Augmented Dickey-Fuller test (ADF test) και το Phillips-Perron test (PP test).

ARIMA Models και μεθοδολογία Box-Jenkins

Μια πιο γενικευμένη μορφή γραμμικών υποδειγμάτων για την μοντελοποίηση και την πρόβλεψη χρονολογικών σειρών, είναι τα μοντέλα ARIMA. Η λέξη ARIMA προέρχεται από τα αρχικά των λέξεων «Auto-regressive integrated moving average» που σημαίνει αυτοπαλίνδρομο ολοκληρωμένο υπόδειγμα κινητών μέσων. Ένα ARIMA(p,d,q) εκφράζεται μαθηματικά ως εξής:

$$y_t = a + \sum_{i=1}^p \beta_i y_{t-i} + \sum_{i=1}^q \gamma_i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t$$

Όπως αυτή η διαδικασία μοντελοποίησης προσπαθεί να εκφράσει την χρονολογική σειρά χρησιμοποιώντας σαν ερμηνευτικές μεταβλητές p υστερήσεις της σειράς και q υστερήσεις του διαταρακτικού όρου ε_t . Φυσικά πρέπει πρώτα να έχουμε κάνει στάσιμη τη χρονολογική σειρά διαφοροποιώντας την d φορές, εφόσον κριθεί απαραίτητο. Τα υποδείγματα ARIMA συνδέθηκαν κατά κύριο λόγο με τους Box και Jenkins (1976), οι οποίοι πρότειναν μια συστηματική και ολοκληρωμένη μεθοδολογία για την κατασκευή των υποδειγμάτων αυτών. Η μεθοδολογία αυτή αποτελείται από τα τρία παρακάτω βήματα:

α) Ταυτοποίηση. Προσδιορισμός δηλαδή των p , d και q . Πρώτα ξεκινάμε από τον προσδιορισμό του d . Εάν η χρονολογική μας σειρά δεν είναι στάσιμη τότε τη διαφοροποιούμε d φορές μέχρι να γίνει στάσιμη. Στην πράξη μία ή δύο φορές είναι αρκετές. Ο προσδιορισμός των p και q μπορεί να γίνει με την βοήθεια των συντελεστών αυτοσυσχέτισης και μερικής αυτοσυσχέτισης.

β) Εκτίμηση των υποδειγμάτων. Στην περίπτωση που το υπόδειγμά μας είναι καθαρά υπόδειγμα $AR(p)$ ή αλλιώς $ARIMA(p,0,0)$, τότε το εκτιμούμε χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Σε κάθε άλλη περίπτωση χρησιμοποιούμε μη-γραμμικές μεθόδους βελτιστοποίησης, όπως τη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας.

γ) Διαγνωστικός έλεγχος των παραμέτρων του υποδείγματος που εκτιμήσαμε, κάνοντας έλεγχο των καταλοίπων και χρησιμοποιώντας τα κριτήρια καλής προσαρμογής Akaike Information (AIC) και Schwartz (SCH). Τα κριτήρια αυτά υπολογίζονται ως εξής:

$$AIC = -\frac{2\ell}{n} + \frac{2K}{n}$$

$$SCH = -\frac{2\ell}{n} + \frac{K \log n}{n}$$

Όπου ℓ είναι η τιμή της λογαριθμικής πιθανοφάνειας:

$$\ell = -\frac{n}{2} \left[1 + \log(2\pi) + \log\left(\frac{ESS}{n}\right) \right]$$

και $K = q + p + 1$, n = σύνολο παρατηρήσεων και ESS = άθροισμα των τετραγώνων των καταλοίπων. Σύμφωνα με τα κριτήρια αυτά προτιμούμε το υπόδειγμα με τις μικρότερες τιμές.

Συνοπτικά στην πράξη κάνουμε δοκιμές με διάφορα υποδείγματα και επιλέγουμε αυτό με τα καλύτερα κριτήρια. Μάλιστα οι Box και Jenkins προτείνουν να ξεκινάμε με όσο το δυνατόν μικρότερες τάξεις και σιγά-σιγά να προχωρούμε σε μεγαλύτερες τάξεις. Γιατί όσο μικρότερες είναι οι τάξεις του υποδείγματος $ARIMA(p,d,q)$, τόσο μικρότερος ο αριθμός των παραμέτρων προς εκτίμηση. Αυτή η πρόταση των Box και Jenkins ονομάζεται «αρχή της οικονομίας των παραμέτρων».

3. Θεωρία αποδοτικών αγορών και αποτυχία των γραμμικών μοντέλων

Πριν εξηγήσουμε ποια είναι η χρησιμότητα των μη-γραμμικών υποδειγμάτων για τη μοντελοποίηση χρηματοοικονομικών χρονολογικών σειρών, αναγκαίο είναι πρώτα να αναφερθεί μια θεωρία που συνδέεται με τα γραμμικά μοντέλα. Αυτή είναι η Θεωρία των Αποτελεσματικών Αγορών (Efficient Market Hypothesis, EMH). σύμφωνα με αυτήν την θεωρία οι παρούσες τιμές των χρεογράφων αντικατοπτρίζουν κάθε σχετική και διαθέσιμη πληροφορία κατά τρόπο αποτελεσματικό και αλλάζουν συνεχώς προκειμένου να ενσωματώσουν οποιαδήποτε νέα πληροφορία. Επίσης αυτές οι τιμές αλλάζουν εντελώς τυχαία, επομένως είναι αδύνατον για κάποιον να «νικήσει» την αγορά και να βγάλει υπερβολικά κέρδη, γιατί οποιαδήποτε πληροφορία έχει ενσωματωθεί στην τιμή του χρεογράφου. Εφόσον η νέα πληροφορία έρχεται στην αγορά με ένα τυχαίο τρόπο, πρέπει και οι μεταβολές των τιμών των περιουσιακών στοιχείων πρέπει να διακυμαίνονται, επίσης τυχαία. Ο μόνος τρόπος για να κάνει κάποιος υπερβολικά κέρδη είναι να επενδύσει σε χρεόγραφα μεγάλου κινδύνου. Για όλα αυτά η θεωρία προϋποθέτει ότι οι χρηματιστηριακές αγορές είναι πλήρως ανταγωνιστικές και όλοι οι επενδυτές είναι ομοιόμορφα πληροφορημένοι και λογικά σκεπτόμενοι και ο σκοπός τους είναι να μεγιστοποιήσουν το κέρδος τους. Επίσης μερικοί οικονομολόγοι συμπληρώνουν ότι οι τιμές των αξιόγραφων ενσωματώνουν πληροφορίες μέχρι το σημείο όπου το οριακό κόστος των επενδυτών που αποφασίζουν βάσει των διαθέσιμων πληροφοριών, δεν υπερβαίνει το οριακό τους όφελος.

Συνήθως ορίζονται τρεις μορφές αποτελεσματικότητας:

- i) Η μορφή Ασθενούς Αποτελεσματικότητας (weak form efficiency). Σύμφωνα με αυτή ιστορικές τιμές δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τους επενδυτές για την επίτευξη υπερβολικών αποδόσεων.
- ii) Η μορφή Ημι-Ισχυρής Αποτελεσματικότητας (semi-strong efficiency). Σύμφωνα με αυτή δημοσιευμένες πληροφορίες όπως ισολογισμοί, κέρδη, μερίσματα κλπ. έχουν ήδη ενσωματωθεί στις παρούσες τιμές

των χρεογράφων και οι επενδυτές δεν μπορούν να τις χρησιμοποιήσουν για να βγάλουν υπερβολικά κέρδη.

- iii) Η μορφή Ισχυρής Αποτελεσματικότητας (strong form efficiency). Σύμφωνα με αυτή τη μορφή ακόμα και μη δημοσιευμένες πληροφορίες, πληροφορίες που είναι διαθέσιμες μόνο σε συγκεκριμένους επενδυτές, είναι κι αυτές ενσωματωμένες στις παρούσες τιμές των χρεογράφων και δε μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίτευξη υπερβολικών κερδών.

Αυτή η θεωρία προτάθηκε από τον Eugene Fama του Πανεπιστημίου του Σικάγο τη δεκαετία του 1960 και έχει αποτελέσει τον έναν από τους κύριους ακρογωνιαίους λίθους για χρηματοοικονομική ακαδημαϊκή έρευνα. Έχει συνδεθεί άμεσα με το μοντέλο του τυχαίου περιπάτου γιατί το μοντέλο αυτό ήταν αρκετά συνεπές με την θεωρία των αποτελεσματικών αγορών. Η έμφαση σε αυτό το μοντέλο ξεκίνησε από παρατηρήσεις όπως αυτή του Samuelson (1965), ο οποίος υποστήριζε ότι απόδειξη για την τυχαία μεταβολή των τιμών είναι η εξής παρατήρηση: «Στις ανταγωνιστικές αγορές για κάθε αγοραστή υπάρχει και ένας πωλητής. Εάν κάποιος ήταν σίγουρος ότι μια τιμή θα αυξηθεί, θα είχε ήδη αυξηθεί. Συζητήσεις σαν αυτές χρησιμοποιούνται στο να συμπεράνουν ότι ανταγωνιστικές τιμές πρέπει να αντικατοπτρίζουν και τις αλλαγές των τιμών... οι οποίες ακολουθούν τυχαίο περίπατο χωρίς τη δυνατότητα πρόβλεψης. Παρατηρήσεις σαν κι αυτές είχαν γίνει και πριν την διατύπωση της θεωρίας αυτής. Έρευνα του Alfred Cowles τη δεκαετία του '30 κατέληξε στο συμπέρασμα ότι επαγγελματίες επενδυτές αδυνατούσαν να κερδίσουν την αγορά. Μελέτες έδειξαν ότι οι τιμές των αμερικανικών μετοχών και παρόμοιων χρηματοοικονομικών σειρών ακολουθούσαν τυχαίο περίπατο.

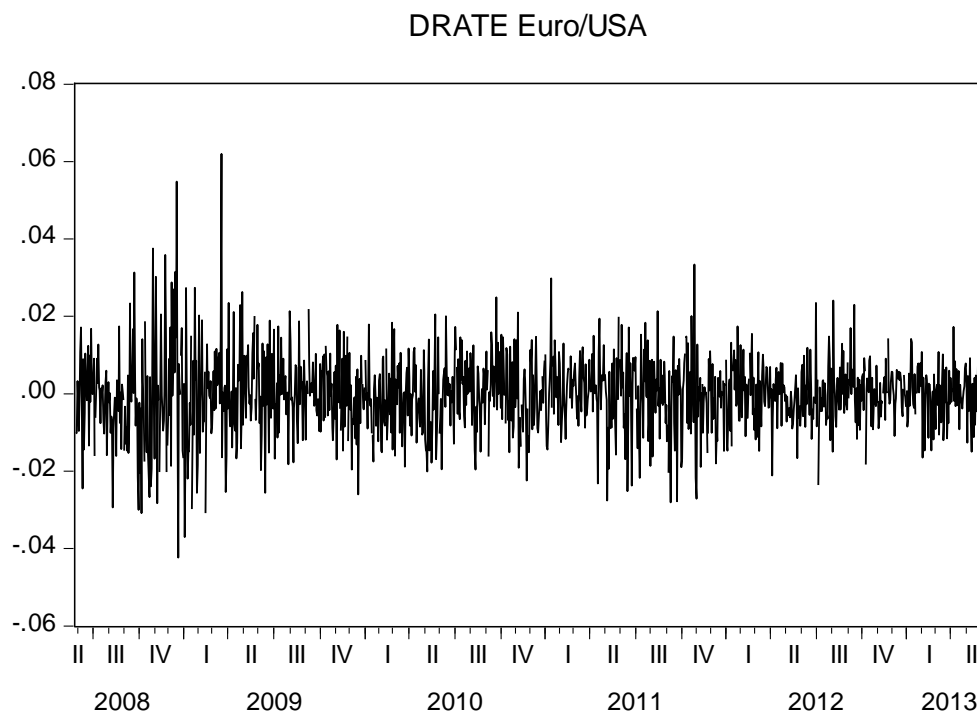
Παρ' όλα αυτά όμως υπήρξαν και περιπτώσεις που ο τυχαίος περίπατος και η θεωρία των αποτελεσματικών αγορών αδυνατούσαν να εξηγήσουν μερικά οικονομικά φαινόμενα. Ο Mandebrot (1963) παρατήρησε ότι μεγάλες αλλαγές στις τιμές κεφαλαίων ακολουθούνταν από επίσης μεγάλες αλλαγές ανεξαρτήτου πρόσημου, όπως και μικρές αλλαγές ακολουθούνταν από μικρές αλλαγές ανεξαρτήτου πρόσημου. Ο Hsieh (1988) απέρριψε τη μηδενική υπόθεση ότι πέντε συναλλαγματικές ισοτιμίες είναι IID. Ο Arrow (1989) υποστήριξε ότι πολλά εμπειρικά φαινόμενα δεν εξηγούνται καλά από τα γραμμικά στοχαστικά μοντέλα. Ο Lorenz υποστηρίζει όταν αποδεχόμαστε αυτομάτως τα γραμμικά μοντέλα χωρίς να

εξετάζουμε πρωτίστως για μη-γραμμικότητα, καθιστά τις θεωρίες αυτές ύποπτες και μπορεί οι αποδείξεις για γραμμικότητα στα οικονομικά να είναι υπερεκτιμημένες. Ακόμα και οι ίδιοι υποστηρικτές της θεωρίας των αποτελεσματικών αγορών μερικές φορές αποδέχονταν την αδυναμία της. Ο Burton Malkiel, γνωστός υπέρμαχος της θεωρίας αυτής, συγγραφέας του βιβλίου “A Random Walk Down Wall Street” έχει προειδοποιήσει ότι ορισμένες αναδυόμενες αγορές όπως η Κίνα δεν είναι εμπειρικά αποτελεσματικές. Αγορές όπως της Σαγκάη, σε αντίθεση με τις αγορές των Ηνωμένων Πολιτειών, παρουσιάζουν σημαντική αυτοσυσχέτιση και δεν ακολουθούν τον τυχαίο περίπατο.

Η κριτική απέναντι στη θεωρία αυτή άρχισε να γίνεται εντονότερη από το 2007 μέχρι σήμερα, δηλαδή την περίοδο της πρόσφατης χρηματοοικονομικής κρίσης. Πολλοί κατακριτές της θεωρίας υποστηρίζουν αυτή είναι υπεύθυνη για την κρίση, υποστηρίζοντας ότι η πίστη στην θεωρία αυτή προκάλεσε τους χρηματοοικονομικούς ηγέτες να έχουν μειωμένη αντίληψη για τον κίνδυνο να «σκάσει» η «φούσκα». Ο Paul Volcker, πρώην πρόεδρος της Ομοσπονδιακής Τράπεζας των Η.Π.Α. (Fed), υποστηρίζει ότι «είναι ξεκάθαρο ότι μία από τις αιτίες της σημερινής οικονομικής κρίσης είναι η αδικαιολόγητη πίστη σε ορθολογικές προσδοκίες και αποτελεσματικές αγορές. Κατά τη διάσκεψη της Διεθνούς Οργάνωσης Επιτροπών Κεφαλαιαγοράς, που πραγματοποιήθηκε τον Ιούνιο του 2009, η υπόθεση αυτή ήταν στο επίκεντρο της συζήτησης. Ο Martin Wolf, ο κύριος σχολιαστής οικονομικών των Financial Times, απέρριψε τη θεωρία ως ένα άχρηστο τρόπο για να εξετάσει κάποιος με ποιο τρόπο λειτουργούν οι αγορές στην πραγματικότητα. Ο Paul McCulley, διευθύνων σύμβουλος της Pimco, ήταν λιγότερο ακραίος στην κριτική του, λέγοντας ότι η θεωρία δεν είχε αποτύχει, αλλά ότι είχε "σοβαρές ελλείψεις".

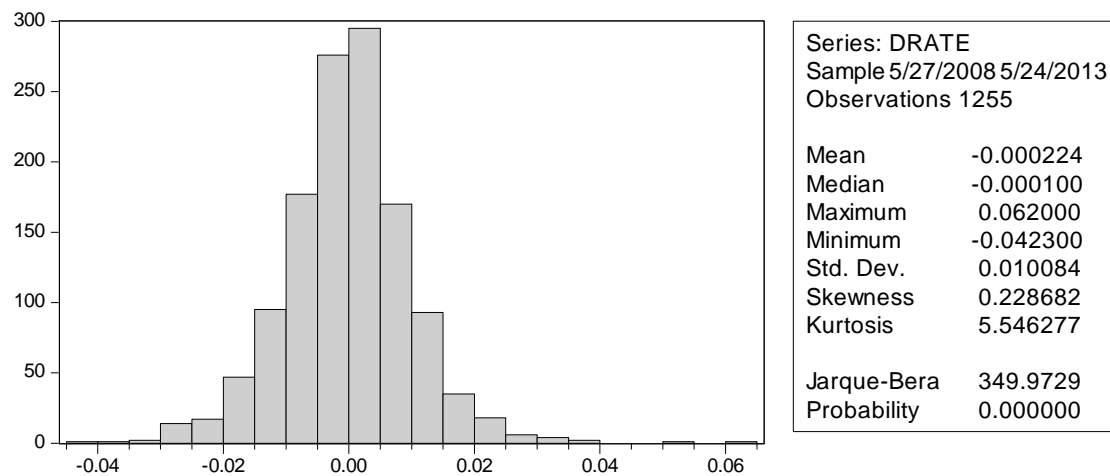
4. Ανιχνεύοντας τη μη-γραμμικότητα και το BDS test

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως τα γραμμικά υποδείγματα είναι αδύναμα στο να εκφράσουν χρηματοοικονομικές χρονολογικές σειρές. Ας δούμε πρακτικά τι σημαίνει αυτό. Πολλές σειρές παρουσιάζουν ιδιαίτερα χαρακτηριστικά όπως αυτό της ομαδοποιημένης αστάθειας (volatility clustering). Ομαδοποιημένη αστάθεια είναι το φαινόμενο που παρατηρείται συχνά στα χρηματοοικονομικά όπου μεγάλες αλλαγές τείνουν να ακολουθούνται από μεγάλες αλλαγές, ανεξαρτήτου πρόσημου, και μικρές αλλαγές ακολουθούνται από μικρές αλλαγές, ανεξαρτήτου πρόσημου, όπως αυτό εκφράστηκε από τον Mandelbrot (1963). Όπως παρατηρείται για παράδειγμα στο γράφημα 3. Στο γράφημα αυτό απεικονίζονται καθημερινές αλλαγές στην ισοτιμία Ευρώ/Δολαρίου Η.Π.Α. Το φαινόμενο της ομαδοποιημένης αστάθειας είναι φανερά έντονο.



Επίσης άλλο χαρακτηριστικό τέτοιων χρονολογικών σειρών είναι η έντονη ασυμμετρία ως προς την κατανομή των δεδομένων και κατανομές με υπερβολική κύρτωση ή αλλιώς λεπτοκύρτωση. Έχουμε δηλαδή χονδροσκελείς κατανομές και δεν ακολουθούν την κανονική κατανομή, φαινόμενο που μας βάζει σε υποψίες ότι οι

τιμές της σειράς δεν είναι IID. Ας δούμε τα χαρακτηριστικά αυτά της σειράς του παραπάνω παραδείγματος.



Αυτό που παρατηρούμε είναι ότι τα δεδομένα παρόλο που δείχνουν κάποια συμμετρία, έχουν υπερβολική κύρτωση (Kurtosis), δηλαδή η τιμή της είναι μεγαλύτερη του 3. Δηλαδή τα δεδομένα δεν είναι κανονικά κατανομημένα, ή αλλιώς δεν είναι IID, κάτι που φαίνεται και από το στατιστικό Jarque-Bera.

Τέλος τα δεδομένα σε τέτοιες χρονοσειρές μπορεί να παρουσιάζουν το λεγόμενο «φαινόμενο της μόχλευσης» (leverage effect), για το οποίο μίλησε πρώτος ο Black (1976). Ο Black παρατήρησε ότι για τις μετοχές συχνά οι προς τα κάτω διαταραχές των τιμών τους ακολουθούνται από μεγαλύτερη μεταβλητότητα και αστάθεια από ότι οι αυξητικές διαταραχές ίσου μεγέθους. Ένα πολύ καλό τεστ που ελέγχει για μη γραμμικότητα είναι το BDS test.

BDS test

Το όνομα του τεστ προέρχεται από τα από τα αρχικά των ερευνητών που το ανέπτυξαν, δηλαδή των Brock, Dechert και Scheinkman (1987). Είναι αδιαμφισβήτητο το πιο γνωστό τεστ για μη-γραμμικότητα. Το τεστ αυτό βασίζεται πάνω στην συνάρτηση συσχέτισης (correlation function ή correlation integral) που παρουσίασαν οι Grassberger και Procaccia (1983). Εάν μια χρονολογική σειρά ακολουθεί κανονική κατανομή, τότε το στατιστικό BDS εκφράζεται ως εξής:

$$BDS_{m,e} = \frac{\sqrt{n}\{C_{m,e} - (C_{1,e})^m\}}{\sigma_{m,e}}$$

Όπου n το μέγεθος του δείγματος, σ η τυπική απόκλιση, m είναι η λεγόμενη διάσταση εμβάθυνσης (embedding dimension), έτσι ώστε μια μονοδιάστατη χρονοσειρά να μπορεί να παρουσιαστεί ως ένα διάνυσμα με m διαστάσεις, και ε είναι η ακτίνα. Το τεστ αυτό αρχικά κατασκευάστηκε για να ελέγχει εάν η τα δεδομένα είναι ιδανικά και ανεξάρτητα κατανεμημένα (IID), με το σκοπό να εντοπίσει μια τυχόν μη-γραμμική ή ακόμα και χαοτική δομή. Επίσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί στα κατάλοιπα ενός υποδείγματος για να εντοπίσει τυχόν μη-γραμμικότητα. Το BDS statistic συγκρίνεται με τις κριτικές τιμές της Z κατανομής. Εάν απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση για IID-ness τότε αυτό σημαίνει ότι το υπόδειγμα δεν είναι σωστά καθορισμένο και ότι χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε ένα διαφορετικό μη-γραμμικό μοντέλο ή ότι η σειρά μας είναι χαοτική.

5. Μη- γραμμικά μοντέλα Χρονολογικών σειρών

Υποδείγματα ARCH-GARCH

Το υπόδειγμα αυτοπαλίνδρομης υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας (ARCH) διατυπώθηκε από τον Engle (1982), ο οποίος πρότεινε ότι η διακύμανση του διαταρακτικού όρου έχει έναν τύπο ετεροσκεδαστικότητας η οποία εξαρτάται από προηγούμενες τιμές του. Πιο συγκεκριμένα, έστω η χρονολογική σειρά $\{y_t\}$. θεωρούμε αρχικά ένα αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα 1^{ης} τάξης, AR(1).

$$y_t = \alpha + \beta_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Ο διαταρακτικός όρος ακολουθεί το υπόδειγμα:

$$\varepsilon_t^2 = c + a\varepsilon_{t-1}^2 + u_t$$

Όπου u_t ένας ανεξάρτητος λευκός θόρυβος. Ο μέσος όρος και ο υπό συνθήκη μέσος του διαταρακτικού όρου είναι μηδέν, η διακύμανση είναι σταθερή, αλλά η υπό συνθήκη διακύμανση δεν είναι σταθερή και έχουμε υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητα. Τότε η υπό συνθήκη διακύμανση αυτή εκφράζεται ως:

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2$$

Η παραπάνω σχέση ονομάζεται υπό συνθήκη μεταβλητότητα πρώτου βαθμού, ARCH(1), καθώς περιλαμβάνει μία υστέρηση του διαταρακτικού όρου. Μια γενικευμένη μορφή ενός υποδείγματος ARCH(1) είναι ένα υπόδειγμα ARCH(p) στο οποίο ουσιαστικά αυξάνουμε την τάξη των αυτοπαλινδρων όρων, δηλαδή:

$$\varepsilon_t^2 = c + \sum_{i=1}^p a_i \varepsilon_{t-i}^2 + u_t$$

Μπορούμε να ελέγξουμε για αποτέλεσμα ARCH παλινδρομώντας την παραπάνω εξίσωση, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, παίρνοντας τα

κατάλοιπα του αρχικού μας υποδείγματος και ελέγχουμε με την στατιστική F. Εάν απορρίψουμε την μηδενική υπόθεση τότε έχουμε αποτέλεσμα ARCH. Λύση του παραπάνω προβλήματος είναι το υπόδειγμα GARCH.

Το υπόδειγμα GARCH

Για να λύσει το παραπάνω πρόβλημα ο Bollerslev (1986) πρότεινε τα γενικευμένα αυτοπαλίνδρομα υποδείγματα δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας, GARCH. Σε αυτά τα υποδείγματα η υπό συνθήκη διακύμανση δεν εκφράζεται μόνο ως συνάρτηση των παρελθοντικών τιμών του διαταρακτικού όρου αλλά και ως συνάρτηση παρελθοντικών τιμών της ίδιας της υπό συνθήκη διακύμανσης. Μια γενικευμένη μορφή του υποδείγματος αυτού είναι:

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 + u_t$$

Το παραπάνω υπόδειγμα είναι ένα GARCH τάξεως p και q, GARCH(p,q). Για μεγάλες τιμές των p και q η εκτίμηση είναι δύσκολη γι' αυτό ξεκινάμε με τιμές ίσες με τη μονάδα και ανεβαίνουμε σταδιακά. Η εκτίμηση αυτών των υποδειγμάτων γίνεται με τη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας (ML) με εκτιμητές ασυμπτωτικά αποτελεσματικούς. Τέλος μπορούμε να κάνουμε εκ νέου έλεγχο για αποτέλεσμα ARCH για να δούμε εάν επιλύθηκε το πρόβλημα.

Υπόδειγμα EGARCH

Το κακό με τα μοντέλα GARCH είναι ότι είναι λίγο περιοριστικά γιατί η υπό συνθήκη διακύμανση εξαρτάται μόνο από το μέγεθος των προηγούμενων τιμών και όχι από το πρόσημό τους, γιατί χρησιμοποιούνται οι τιμές αυτές υψωμένες στο τετράγωνο. Επίσης αυτά τα υποδείγματα δεν μπορούν να περιγράψουν ασυμμετρίες, όπως το φαινόμενο της μόχλευσης που αναφέρθηκε προηγουμένως. Γι' αυτό ο Nelson (1991) πρότεινε το εκθετικό γενικευμένο αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας, exponential GARCH, EGARCH. Αυτό εκφράζεται ως εξής:

$$\log(h_t) = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i \ln(h_{t-i}) + \sum_{j=1}^q \beta_j (\varphi \varepsilon_{t-j} + \varphi |\varepsilon_{t-j}| - \varphi E|\varepsilon_{t-1}|)$$

Όπου οι παράμετροι a_0 , a_i και β_i δεν περιορίζονται στο να είναι μη-αρνητικοί και ο λογάριθμος της διακύμανσης μας εξασφαλίζει ότι δε θα έχουμε αρνητικές τιμές αυτής.

Διγραμμικά Υποδείγματα (Bilinear Models)

Τα Bilinear Models χρησιμοποιούνται τόσο σε πολυμεταβλητά υποδείγματα, όσο και σε μονομεταβλητά υποδείγματα. Το διγραμμικό μοντέλο για τις χρονολογικές σειρές προτάθηκε από τους Granger και Anderson (1978). Προσπαθεί να εξηγήσει μη-γραμμικότητες στον υπό-συνθήκη μέσο. Αργότερα οι Subba Rao και Gabr (1984) εξέτασαν μερικές ιδιότητες και εφαρμογές του μοντέλου αυτού και οι Liu και Brockwell (1988) μελέτησαν γενικά διγραμμικά μοντέλα. Το μοντέλο BL (p,q,m,n) εκφράζεται ως εξής:

$$y_t = a + \sum_{i=1}^p \beta_i y_{t-i} + \sum_{i=1}^q \gamma_i \varepsilon_{t-i} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \delta_{ij} y_{t-i} \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t$$

Όπου p, q, m και n, μη-αρνητικοί ακέραιοι, β_i , γ_i και δ_{ij} σταθεροί και ε_t ο διαταρακτικός όρος. Δηλαδή το μοντέλο αυτό προτείνει ότι η χρονολογική σειρά y δεν εξαρτάται μόνο από χρονικές υστερήσεις της και χρονικές υστερήσεις του διαταρακτικού όρου αλλά και από το γινόμενο των δύο. Παρατηρούμε ότι εάν θέσουμε m=0 και n=0, έχουμε ένα απλό υπόδειγμα ARMA(p,q), το οποίο αναφέρθηκε προηγουμένως. Στην ουσία δηλαδή τα Bilinear Models αποτελούν μια επέκταση των ARMA μοντέλων. Για την εκτίμηση των συντελεστών αυτού του μοντέλου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε δύο μεθόδους. Τη μέθοδο Newton-Rapshon ή τη μέθοδο μη-γραμμικών ελαχίστων τετραγώνων (NLS).

Smooth Transition Autoregression Models (STAR Models)

Τα ομαλής μετάβασης αυτοπαλίνδρομα μοντέλα προτάθηκαν από τους Chan και Tong (1986) και τον Teräsvirta (1994), τα οποία είναι κατάλληλα για μοντελοποίηση χρονολογικών σειρών με ασύμμετρες διακυμάνσεις και περιόδους με απότομες αλλαγές. Είναι κατάλληλα δηλαδή για μοντελοποίηση χρηματοοικονομικών χρονολογικών σειρών, γιατί επιτρέπουν ομαλή μετάβαση μεταξύ αυτών των αλλαγών. Ένα STAR(p) μοντέλο πρώτης τάξης εκφράζεται ως εξής:

$$x_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1} + (\beta_0 + \beta_1 x_{t-1}) F(x_{t-d}) + \varepsilon_t$$

Όπου $F(x_{t-d})$ είναι η εξίσωση μετάβασης. Αυτή η εξίσωση μπορεί να πάρει τις εξής δύο μορφές:

$$F(x_{t-d}) = (1 + e^{[-\gamma(x_{t-d}-c)])^{-1}$$

ή

$$F(x_{t-d}) = 1 - e^{-\gamma(x_{t-d}-c)^2}$$

Όπου $\gamma > 0$. Όταν η εξίσωση μετάβασης είναι της πρώτης μορφής τότε λέμε ότι χρησιμοποιούμε το logistic STAR Model (LSTAR), και όταν είναι της δεύτερης μορφής τότε λέμε ότι χρησιμοποιούμε το exponential STAR Model (ESTAR). Η διαφορά των δύο μοντέλων είναι ότι το LSTAR προσπαθεί να εξηγήσει χρονολογικές σειρές όπου οι ψηλές και οι χαμηλές τιμές έχουν διαφορετική συμπεριφορά και το ESTAR χρονολογικές σειρές όπου ψηλές και χαμηλές τιμές έχουν ίδια συμπεριφορά ενώ διαφέρουν από τις μεσαίες τιμές. Δεν υπάρχει οικονομική θεωρία για το ποιο από τα δύο μοντέλα χρησιμοποιείται κάθε φορά, η επιλογή εξαρτάται καθαρά από την συμπεριφορά των σειρών. Η μέθοδος που χρησιμοποιείται για να εκτιμήσουμε αυτά τα υποδείγματα είναι η μέθοδος των υπο-συνθήκη μη-γραμμικών ελαχίστων τετραγώνων (CNLS).

6. Θεωρία του Χάους

Η θεωρία του Χάους είναι ένας τομέας των μαθηματικών, ο οποίος έχει εφαρμογή σε πολλές επιστήμες, όπως είναι η φυσική, η μηχανολογία, η βιολογία και η οικονομία. Η θεωρία αυτή μελετά τη συμπεριφορά διάφορων μη-γραμμικών δυναμικών συστημάτων, τα οποία είναι ευαίσθητα στις αρχικές τιμές, φαινόμενο το οποίο είναι γνωστό και ως «φαινόμενο της πεταλούδας», όπως την ονόμασε ο φυσικός Edward Lorenz, στις 29 Δεκεμβρίου του 1979, στην ετήσια διάλεξη της Αμερικανικής Ένωσης για την ανάπτυξη της επιστήμης. Στην εισήγηση του αυτή πρότεινε ότι ένα φτερούγισμα μιας πεταλούδας στην Βραζιλία μπορεί να προκαλέσει ένα τυφώνα στο Τέξας. Τα συστήματα αυτά είναι ευαίσθητα στις αρχικές συνθήκες, κατά τις οποίες όμως μικρές διαφορές μπορούν να αποφέρουν τελείως διαφορετικά αποτελέσματα σε βάθος χρόνου, κατατάσσοντας αυτά τα συστήματα αδύνατα στο να προβλεφτούν μακροπρόθεσμα. Αυτά τα συστήματα είναι όμως αιτιοκρατικά (ντετερμινιστικά), το οποίο σημαίνει ότι οι συμπεριφορές στη διάρκεια του χρόνου δε γίνονται τυχαία και εξαρτώνται αποκλειστικά και μόνο από τις αρχικές συνθήκες. Δηλαδή υπάρχει διαφορά μεταξύ μιας τυχαίας συμπεριφοράς και μιας χαοτικής.

Ένας ακριβής ορισμός της χαοτικής συμπεριφοράς δεν υπάρχει, αλλά είναι κοινά αποδεκτός ο ορισμός που πρότεινε ο Devaney, ο οποίος λέει ότι η συμπεριφορά ενός συστήματος για χαρακτηριστεί χαοτική, πρέπει να παρουσιάζει τις εξής ιδιότητες:

1. Να παρουσιάζει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες
2. Να είναι τοπολογικά μεταβατικό
3. Να εμφανίζει ένα πυκνό σύνολο που αποτελείται από όλες τις περιοδικές τροχιές του συστήματος

Η επιστημονική εφαρμογή αυτής της θεωρίας στα οικονομικά μας κάνει να αντιληφθούμε ότι ένα οικονομικό σύστημα, όπως π.χ. το Ευρωπαϊκό, δεν συμπεριφέρεται τυχαία, αλλά χαοτικά, το οποίο σημαίνει ότι μικρή διαταραχή στο σύστημα μπορεί να προκαλέσει μία ακόμα μεγαλύτερη. Δηλαδή κάθε δράση έχει και αντίδραση. Για παράδειγμα μια μικρή διαταραχή στο οικονομικό σύστημα της Αμερικής μπορεί να επιφέρει μία κρίση στην Ευρώπη. Ή η οικονομική κρίση στην Ελλάδα μπορεί να επιφέρει μεγάλη διαταραχή όχι μόνο στο Ευρωπαϊκό σύστημα, αλλά και σε όλα τα άλλα τα οποία συνδέονται με αυτό.

Ειδικότερα στην περίπτωση των χρονολογικών σειρών, μια χρηματοοικονομική χρονολογική σειρά, έχοντας μια μη-γραμμική συμπεριφορά, μπορεί εν τέλει να παρουσιάζει χαοτική συμπεριφορά, με αποτέλεσμα να είναι αδύνατη η όποια πρόβλεψη για αυτήν. Συμπεραίνουμε δηλαδή ότι παρ' όλα τα εργαλεία που μας προσφέρουν η οικονομετρία και τα μαθηματικά, και παρ' όλη την εξέλιξη που έχει υπάρξει τα τελευταία χρόνια με τη βοήθεια των ηλεκτρονικών υπολογιστών, κάποιες οικονομικές συμπεριφορές παραμένουν αδύνατες στο να εξηγηθούν και πόσο μάλλον να προβλεφθούν.

7. Εμπειρική εφαρμογή μη-γραμμικών μοντέλων

Σε αυτό το κομμάτι της εργασίας θα προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε τα παραπάνω τρία μη-γραμμικά μοντέλα σε διάφορες χρηματοοικονομικές σειρές και θα προσπαθήσουμε να μοντελοποιήσουμε την συμπεριφορά τους στο χρόνο. Επιλέχτηκαν έξι χρονολογικές σειρές:

1. Δύο ισοτιμίες ξένων νομισμάτων προς το ευρώ, αυτή του αμερικάνικου δολαρίου και αυτή της βρετανικής λίρας, με χρονική διάρκεια από 1^η Ιανουαρίου 2002 μέχρι 31^η Δεκεμβρίου 2013. Χρησιμοποιούνται οι μέσες τιμές κάθε ημέρας.
2. Δύο μετοχές ελληνικών εταιριών, εισηγμένες στο Χρηματιστήριο Αθηνών, αυτή του Οργανισμού Τηλεπικοινωνιών Ελλάδος (OTE Α.Ε.) και αυτής της ALTEC, μητρική εταιρία του ομίλου ALTEC, με χρονική διάρκεια από 1^η Ιανουαρίου 2006 έως 31^η Δεκεμβρίου 2013. Χρησιμοποιούνται οι προσαρμοσμένες τιμές κλεισίματος σε ημερήσια βάση.
3. Δύο μετοχές ξένων εταιριών, αυτή της Google Inc. και αυτή της Ford Motor Co. Για την Google χρησιμοποιούμε τιμές από τις 20 Αυγούστου 2004 μέχρι τις 31 Δεκεμβρίου 2013. Για την Ford έχουμε τιμές από τις 3 Ιανουαρίου 1977 μέχρι τις 31 Δεκεμβρίου 2013. Κι εδώ χρησιμοποιούνται οι προσαρμοσμένες τιμές κλεισίματος σε καθημερινή βάση.

Μεθοδολογία

Τα βήματα που θα ακολουθήσουμε για την τελική εκτίμηση των υποδειγμάτων είναι τα εξής:

1. Εξετάζουμε τις σειρές για στασιμότητα. Εάν οι χρονολογικές σειρές δεν είναι στάσιμες τότε θα πάρουμε τις πρώτες διαφορές για να εξαλείψουμε τυχόν τάση στα δεδομένα. Το τεστ που θα χρησιμοποιηθεί είναι το Dickey-Fuller test (ADF test).
2. Παλινδρομούμε τα δεδομένα σύμφωνα με τα βήματα κάθε μοντέλου. Δοκιμάζουμε διάφορες τάξεις αυτών και εξετάζουμε αρχικά τα t-statistics των συντελεστών. Έπειτα επιλέγουμε το υπόδειγμα που μας δίνει τις

μικρότερες τιμές των κριτηρίων καλής προσαρμογής Akaike Information (AIC) και Schwartz (SCH).

3. Τρέχουμε το BDS test πάνω στα κατάλοιπα του υποδείγματος που επιλέξαμε για να εξετάσουμε εάν το μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε κατάφερε να ερμηνεύσει τη συμπεριφορά των χρονολογικών σειρών μας. Εάν όχι τότε δοκιμάζουμε τον επόμενο τρόπο μοντελοποίησης και ακολουθούμε πάλι το Βήμα 2.

Το λογισμικό που χρησιμοποιείται είναι το Eviews, έκδοση 7.1.

Έλεγχος στασιμότητας

Ελέγχουμε τις έξι χρονολογικές σειρές για στασιμότητα, τρέχοντας το ADF test. Τα αποτελέσματα που παίρνουμε είναι τα εξής:

Series	ADF Επίπεδα	ADF Πρ. Διαφ.
USD	0,0736	0,0001
GBP	0,4250	0,0000
ALTEC	0,5881	0,0001
OTE	0,6433	0,0000
GOOGLE	0,9410	0,0001
FORD	0,5847	0,0001

Τα αποτελέσματα του πίνακα είναι τα P-values του τεστ σε κάθε σειρά, όπου στη δεύτερη στήλη είναι τα P-values για τα επίπεδα και στην τρίτη στήλη τα P-values για τις πρώτες διαφορές. Τα συγκρίνουμε με το επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας $\alpha = 0,05$. Εάν οι τιμές των P-values είναι μεγαλύτερες του 0,05 τότε αποδεχόμαστε την μηδενική υπόθεση για την ύπαρξη μοναδιαίας ρίζας, δηλαδή ότι δεν είναι στάσιμες. Όπως παρατηρούμε από τον πίνακα καμία από τις σειρές μας δεν είναι στάσιμη γι' αυτό πήραμε τις πρώτες διαφορές. Τα P-values του ADF test πάνω στις πρώτες διαφορές μας δείχνουν ότι οι σειρές έγιναν στάσιμες, αφού είναι όλα μικρότερα του $\alpha = 0,05$.

Τυχαίος περίπατος και ARIMA Models

Πριν περάσουμε στην εκτίμηση των μη-γραμμικών υποδειγμάτων θα ήταν καλό να εξετάσουμε πρώτα τα μοντέλα του τυχαίου περιπάτου και των ARIMA πάνω στις χρονολογικές μας σειρές, για να δούμε όντως εάν αυτά δεν μπορούν να τις ερμηνεύσουν σωστά, δοκιμάζοντας το BDS test πάνω στα κατάλοιπα των υποδειγμάτων που θα εκτιμήσουμε.

Τυχαίος περίπατος

Τα εκτιμημένα υποδείγματα που παίρνουμε για τις χρονολογικές μας σειρές εφαρμόζοντας το μοντέλου του τυχαίου περιπάτου είναι τα εξής:

Σειρά	α	BDS test		P-Value
		$\epsilon = s$	$m = 3$	
USD	0,00010 (-0,489)	5,839		0,000
GBP	0,00007 (-0,728)	11,514		0,000
ALTEC	-0.000977 (-1,050)	22,927		0,000
OTE	-0,00470 (-0,761606)	15,493		0,000
GOOGLE	0,42814 (-2,127)	6,936		0,000
FORD	0,001587 (-0,720714)	54,568		0,000

Στην δεύτερη στήλη έχουμε του εκτιμητές του τυχαίου περιπάτου για κάθε σειρά και από κάτω το t-statistic αυτού, στην τρίτη στήλη έχουμε το BDS statistic που παίρνουμε τρέχοντας το BDS test πάνω στα κατάλοιπα, με ϵ ίσο με την τυπική απόκλιση της αντίστοιχης χρονολογικής σειράς και με $m = 3$, και στην τελευταία στήλη έχουμε τα P-Value των τεστ αυτών. Κοιτώντας κατευθείαν τα αποτελέσματα της τελευταίας στήλης παρατηρούμε ότι απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση για i.i.d. δεδομένα σε κάθε σειρά, αφού τα P-values είναι μηδενικά και άρα μικρότερα από κάθε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας α . Επομένως ο τυχαίος περίπατος δεν κατάφερε να ερμηνεύσει τη συμπεριφορά των χρονολογικών σειρών.

ARIMA Models

Τώρα θα δοκιμάσουμε να μοντελοποιήσουμε τα δεδομένα σύμφωνα με τα ARIMA Models. Το υπόδειγμα που θα επιλέξουμε για κάθε σειρά είναι αυτό που θα έχει κάθε εκτιμητή του στατιστικά σημαντικό και αυτό που έχει τις μικρότερες τιμές AIC και Schwartz. Τα εκτιμημένα υποδείγματα που επιλέχτηκαν για κάθε σειρά είναι τα εξής:

Σειρά	c	AR(1)	AR(2)	AR(3)	AR(4)	MA(1)	MA(2)	MA(3)	MA(4)
USD	-	0,396 (240,91)	1,170 (792,51)	0,398 (264,59)	-0,997 (-604,3)	-0,396 (-225,2)	-1,168 (-604,31)	-0,396 (-222,9)	0,993 (590,86)
GBP	-	-0,213 (-2,309)	-0,464 (-6,56)	-	0,340 (5,260)	0,262 (3,010)	0,432 (7,333)	-	-0,420 (-6,824)
ALTEC	-	-0,139 (-6,61)	-	-	-0,317 (-0,317)	-	-	-	0,289 (0,289)
OTE	-	-	-	-0,049 (-2,240)	-0,180 (-6,058)	-	-0,071 (-3,288)	-	0,157 (7,216)
GOOGLE	0,429 (2,087)	-	0,086 (4,178)	-	-	-	-0,068 (-23,889)	-	-
FORD	-	-0,093 (-9,686)	-0,333 (-32,17)	-	0,053 (5,240)	-	0,345 (351,602)	-	-

Τα αποτελέσματα του BDS test είναι:

Σειρά	BDS (3,€)		BDS (4,€)	
	Stat	p-value	stat	p-value
USD	6,261	0,000	7,073	0,000
GBP	14,605	0,000	17,562	0,000
ALTEC	23,626	0,000	27,638	0,000
OTE	15,360	0,000	17,584	0,000
GOOGLE	6,817	0,000	8,312	0,000
FORD	53,835	0,000	63,306	0,000

Όπως παρατηρούμε ούτε το ARIMA μοντέλο δεν είναι ικανό περιγράψει τη συμπεριφορά των χρηματοοικονομικών μας σειρών, αφού το p-values του κάθε test είναι μηδενικό επομένως απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση για i.i.d. δεδομένα.

ARCH-GARCH Υποδείγματα

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κομμάτι της εργασίας, τα γραμμικά μοντέλα του τυχαίου περιπάτου και το ARIMA δεν κατάφεραν να εξηγήσουν τη συμπεριφορά των σειρών. Τώρα θα περάσουμε στα μη-γραμμικά μοντέλα ξεκινώντας από τα υποδείγματα της «οικογένειας» ARCH-GARCH. Πριν εκτιμήσουμε αυτά τα υποδείγματα μπορούμε πρώτα να ελέγξουμε εάν η σειράς μας έχουν ένδειξη ότι παρουσιάζουν αυτό που αποκαλούμε σαν ARCH effect, δηλαδή ότι η διακύμανση των σειρών δεν είναι σταθερή αλλά παρουσιάζει μια μορφή ετεροσκεδαστικότητας. Αυτό το τεστ (ARCH LM) πραγματοποιείται πάνω στα κατάλοιπα του τυχαίου περιπάτου. Τα αποτελέσματα που παίρνουμε από το Eviews είναι:

Σειρά	LM (1)	P-value	LM (3)	P-value
USD	237,782	0,000	300,080	0,000
GBP	393,846	0,000	210,119	0,000
ALTEC	29,269	0,000	82,815	0,000
OTE	47,740	0,000	1597,229	0,000
GOOGLE	1,169	0,279	3,387	0,495
FORD	503,178	0,000	833,623	0,000

Το τεστ εκτελέστηκε δύο φορές, χρησιμοποιώντας μία και τρεις υστερήσεις. Οι κριτικές τιμές χ^2 για επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας 95% είναι 3,841 και 7,815 αντίστοιχα. Κοιτώντας τα αποτελέσματα παρατηρούμε ότι πέντε από τις έξι χρονολογικές σειρές έχουν ένδειξη για ARCH effect, εκτός από αυτή της μετοχής της Google Inc., αφού οι τιμές του τεστ ξεπερνούν τις κριτικές τιμές και επομένως απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση, που αυτή είναι ότι τα κατάλοιπα δεν παρουσιάζουν ARCH effect. Επομένως το επόμενο βήμα είναι να δοκιμάσουμε να εκτιμήσουμε υπόδειγμα ARCH για κάθε σειρά. Τα αποτελέσματα που παίρνουμε είναι:

Εκτιμημένα υποδείγματα ARIMA-ARCH για τις έξι χρονολογικές σειρές

Σειρά	c	AR(1)	AR(2)	AR(3)	MA(1)	MA(2)	MA(3)	C	ARCH(1)	ARCH(2)	ARCH(3)	GARCH(1)	GARCH(2)	GARCH(3)
USD	-	-0,885	-	0,486	0,856	-	-0,461	1,80E-07	0,061	-0,074	0,046	0,963	-	-
		(-11,739)		(15,465)	(10,587)		(-12,287)	(1,739)	(3,953)	(-2,849)	(2,651)	(164,518)		
GBP	-	-	-0,713	0,261	-	0,738	-0,260	0,000	0,102	0,067	-	-0,079	0,109	0,800
			(-6,520)	(2,569)		(6,987)	(-2,681)	(2,780)	(6,327)	(3,499)		(-1,397)	(2,446)	(21,923)
ALTEC	-0,0007	1,048	-0,249	-	-1,258	0,533	-0,158	0,000	0,675	-	-	0,382	0,043	0,160
	(-6,286)	(7,996)	(-2,221)		(-10,125)	(4,077)	(-7,228)	(13,89)	(30,003)			(8,824)	(1,015)	(6,442)
OTE	-	0,651	-	-0,671	-0,624	-0,055	0,704	0,0001	0,103	0,059	-0,112	0,377	0,569	-
		(22,623)		(-20,818)	(-18,009)	(-2,476)	(20,781)	(2,448)	(4,169)	(2,799)	(-4,953)	(2,268)	(3,599)	-
GOOGLE	0,686	-0,374	-1,027	-0,296	0,389	1,022	0,311	5,020	0,033	0,153	-	-0,029	0,113	0,702
	(4,087)	(-17,504)	(-473,439)	(-13,964)	(521,576)	(2160,04)	(233,29)	(7,199)	(3,056)	(11,609)		(-1,893)	(4,153)	(26,068)
FORD	-	-	-	-	-0,031	-	-	6,01E-0,8	0,109	-0,033	-0,047	0,973	-	-
					(-2,768)			(1,480)	(10,521)	(-2,411)	(-6,363)	(615,235)	-	-

Τρέχουμε το BDS test στα τυποποιημένα κατάλοιπα (standardized residuals) των εκτιμημένων υποδειγμάτων και τα αποτελέσματα που παίρνουμε είναι:

Σειρά	BDS (3,€)		BDS (4,€)		BDS (5,€)	
	€ = S					
	Stat	p-value	stat	p-value	Stat	p-value
USD	-1,441	0,149	-1,782	0,075	-1,582	0,113
GBP	-1,166	0,243	-0,590	0,551	-0,429	0,667
ALTEC	0,134	0,892	1,346	0,178	2,634	0,008
OTE	0,343	0,731	0,547	0,583	0,782	0,434
GOOGLE	-0,789	0,430	-0,204	0,837	0,564	0,572
FORD	0,393	0,694	0,181	0,237	1,735	0,082

Σειρά	BDS (3,€)		BDS (4,€)		BDS (5,€)	
	€ = 1,5s					
	Stat	p-value	stat	p-value	Stat	p-value
USD	-1,200	0,230	-1,619	0,105	-1,487	0,137
GBP	-0,768	0,442	-0,259	0,794	-0,132	0,894
ALTEC	-1,065	0,286	-0,464	0,642	0,142	0,886
OTE	0,559	0,575	0,567	0,570	0,646	0,517
GOOGLE	-0,474	0,635	-0,100	0,920	0,225	0,821
FORD	-1,084	0,277	-0,540	0,589	-0,225	0,821

Παρατηρούμε ότι σε όλες τις χρονολογικές σειρές δεν απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση του BDS test, δηλαδή τα κατάλοιπα των εκτιμημένων υποδειγμάτων είναι i.i.d. Το ARCH μοντέλο κατάφερε να ερμηνεύσει τη μεταβλητότητα στα δεδομένα και γενικά την συμπεριφορά των σειρών στη διάρκεια του χρόνου. Τώρα το επόμενο βήμα είναι να χρησιμοποιήσουμε τα εκτιμημένα υποδείγματα και να κάνουμε πρόβλεψη.

8. Πρόβλεψη

Πέρα από την εντόπιση και ερμηνευση των σχέσεων που υπάρχουν μεταξύ διάφορων οικονομικών μεταβλητών, ένας δεύτερος ρόλος της οικονομετρίας είναι αυτός της πρόβλεψης. Πάντα ο άνθρωπος από τα αρχαία χρόνια ήθελε να μπορεί να προβλέψει διάφορα γεγονότα της ζωής, έτσι ώστε να μπορεί να αντεπεξέλθει σε τυχόν μελλοντικές δυσκολίες. Για παράδειγμα στην αρχαία Ελλάδα είχαμε το μαντείο των Δελφών. Στα σύγχρονα χρόνια η μετεωρολογία προσπαθεί να προβλέψει τις καιρικές συνθήκες των επόμενων ημερών. Τα οικονομικά δεν αποτελούν εξαίρεση. Πολλές εταιρίες, είτε δημόσιες είτε ιδιωτικές, προσπαθούν να προβλέψουν την πορεία των αγορών τους έτσι ώστε να έχουν περισσότερα κέρδη ή στο άλλο άκρο την μικρότερη δυνατή ζημιά. Από το εάν χρειάζεται να επενδύσουν τα κεφάλαιά τους σε νέες αγορές ή νέες καινοτομίες ή και ακόμα να αποσυρθούν από κάποια δραστηριότητα έτσι ώστε να περιορίσουν τυχόν ζημιές ή ακόμα και πτώχευση.

Αυτός είναι ένας δεύτερος ρόλος που αναλαμβάνουν τα οικονομετρικά μοντέλα. Αν και πολλοί αμφισβητούν την ικανότητα αυτών για πρόβλεψη. Αυτή η άποψη είναι δικαιολογημένη γιατί τα οικονομετρικά μοντέλα, όσο και να έχουν εξελιχθεί τα τελευταία χρόνια, με τη βοήθεια παράλληλα της ραγδαίας εξέλιξης των ηλεκτρονικών υπολογιστών και των οικονομετρικών και στατιστικών λογισμικών, από τη φύση τους είναι αρκετά περιοριστικά. Μπορούν να διαχειριστούν μόνο μεταβλητές που μπορούν να εκφραστούν με αριθμούς. Η ζωή όμως δεν είναι μόνο νούμερα. υπάρχουν και πολλές ποιοτικές μεταβλητές ή οποίες είναι αδύνατον να εκφραστούν μαθηματικά.

όπως και να έχει στο κομμάτι αυτό της εργασίας θα προσπαθήσουμε να κάνουμε προβλέψεις, χρησιμοποιώντας τα υποδείγματα που εκτιμήσαμε. Υπάρχουν δύο τρόποι για να κάνουμε πρόβλεψη. Υπάρχει η μέθοδος που προβλέπει τιμές εκτός δείγματος (out of sample), δηλαδή εκτιμούμε το υπόδειγμα χρησιμοποιώντας τις τιμές που είναι δεδομένες μέχρι και σήμερα και προβλέπουμε μελλοντικές τιμές. Υπάρχει και η in-sample μέθοδος όπου κάνουμε προβλέψεις για τιμές που μας είναι ήδη γνωστές και κάνουμε πρόβλεψη για ένα κομμάτι του δείγματος που χρησιμοποιήσαμε. Αυτή η μέθοδος έχει ένα μεγάλο πλεονέκτημα. Ξέροντας ήδη τις τιμές που προσπαθούμε να προβλέψουμε μπορούμε να τις συγκρίνουμε με τις κανονικές τιμές, και να αξιολογήσουμε την ικανότητα πρόβλεψης του εκτιμημένου

υποδείγματός μας. Για αυτό το σκοπό έχουν δημιουργηθεί διάφορα κριτήρια αξιολόγησης. Τα πιο γνωστά κριτήρια είναι το Mean Absolute Error (MAE), το οποίο υπολογίζει το μέσο όρο των απόλυτων τιμών των σφαλμάτων, το Mean Squared Error (MSE), το οποίο υπολογίζει το μέσο όρο των τετραγώνων των σφαλμάτων και μια παραλλαγή αυτού, το Root Mean Square Error, που στην ουσία είναι η ρίζα του MSE στατιστικού. Γίνεται αυτομάτως κατανοητό ότι όσο πιο μικρές οι τιμές των στατιστικών αυτών τόσο πιο καλή η ικανότητα του υποδείγματος προς εξέταση, για προβλέψεις.

Στην παρούσα εργασία θα κάνουμε προβλέψεις με τη μέθοδο in sample. Θα προβλέψουμε καθημερινές τιμές για τον τελευταίο μήνα των σειρών, δηλαδή για το Δεκέμβριο του 2013, και θα υπολογίσουμε τα MAE και RMSE στατιστικά. Επειδή όμως τα νούμερα αυτά από μόνα τους δε σημαίνουν κάτι, θα τα συγκρίνουμε με αυτά του τυχαίου περιπάτου για να ελέγξουμε εάν τα μη-γραμμικά υποδείγματα είναι καλύτερα για πρόβλεψη των χρηματοοικονομικών σειρών μας, από το γραμμικό του τυχαίου περιπάτου. Τρέχοντας τα τεστ στο Eviews τα αποτελέσματα που παίρνουμε είναι τα εξής:

Σειρά	Random Walk		ARIMA-ARCH	
	MAE	RMSE	MAE	RMSE
USD	0,00383	0,00498	0,00642	0,00881
GBP	0,00243	0,00309	0,00241	0,00309
ALTEC	0,00163	0,00241	0,00210	0,00264
OTE	0,19683	0,25657	0,19287	0,25132
GOOGLE	7,29952	8,56256	7,06436	8,52601
FORD	0,18333	0,29586	0,18327	0,29221

Παρατηρούμε ότι σε όλες τα υποδείγματα, με εξαίρεση αυτού της χρονολογικής σειράς των μετοχών της ALTEC, τα κριτήρια αξιολόγησης των μη-γραμμικών μοντέλων είναι καλύτερα μεν, αλλά οι διαφορές είναι πάρα πολύ μικρές, πράγμα που σημαίνει ότι τα εκτιμημένα υποδείγματά μας, παρόλο που κατάφεραν ερμηνεύσουν τη συμπεριφορά των σειρών δεν είναι καλά για πρόβλεψη.

9. Συμπεράσματα

Όπως αναφέρθηκε και στην αρχή αυτής της εργασίας, μερικές χρονολογικές σειρές, ιδιαίτερα οι χρηματοοικονομικές, παρουσιάζουν μερικά χαρακτηριστικά, όπως αυτό της μεταβλητότητας του μέσου όρου και της διακύμανσης και το φαινόμενο της «μόχλευσης», τα οποία δεν μπορούν να εντοπιστούν και να ερμηνευτούν από τα κλασσικά γραμμικά υποδείγματα του τυχαίου περιπάτου και των μοντέλων ARIMA. Γι' αυτό δημιουργήθηκε η ανάγκη να διατυπωθούν άλλα μοντέλα, τα μη-γραμμικά, τα οποία μπορούν να εντοπίσουν τέτοια χαρακτηριστικά. Ο σκοπός της εργασίας αυτής ήταν να μελετήσει εμπειρικά μερικά μη-γραμμικά υποδείγματα, πάνω σε διάφορες χρηματοοικονομικές σειρές. Όπως είδαμε τα χαρακτηριστικά που αναφέρθηκαν προηγουμένως, εντοπίστηκαν στις σειρές αυτές και καταφέραμε με την χρήση μη-γραμμικών μοντέλων, συγκεκριμένα αυτό του ARIMA-GARCH, να ερμηνεύσουμε επιτυχημένα τις σειρές αυτές. Βέβαια δεν εξετάστηκαν εμπειρικά άλλα μη-γραμμικά υποδείγματα, όπως το Bilinear ή το STAR Model που αναφέρθηκαν στο κομμάτι της θεωρίας, γιατί έτυχε όλες οι σειρές να ερμηνευτούν από το ARIMA-GARCH μοντέλο. Αν και αυτό δεν έχει μεγάλη σημασία γιατί η διαδικασία που θα ακολουθούταν, είτε για την αξιολόγηση της ερμηνεύσεως αυτών των μοντέλων με το BDS test είτε για την αξιολόγηση των προβλέψεων τους, θα ήταν ακριβώς η ίδια.

Τέλος αξίζει να αναφερθεί για περεταίρω μελέτη, ότι ο αριθμός των μη-γραμμικών μοντέλων δεν περιορίζεται στα μοντέλα που αναφέρθηκαν εδώ, αλλά υπάρχουν πολλά άλλα, και παραλλαγές αυτών, όπως το Threshold Autoregressive Model (TAR), το Markov Switching Model και τα Artificial Neural Networks (ANN). Πράγμα που αποδεικνύει την ανάγκη για χρησιμοποίηση τέτοιων μοντέλων στα σύγχρονα χρηματοοικονομικά.

Βιβλιογραφία

- Allan Timmermann, Clive W.J. Granger, Efficient market hypothesis and forecasting, *International Journal of Forecasting* 20 (2004) 15– 27, Elsevier Ltd.
- Artem B. Prokhorov, 2001, *Nonlinear Dynamics and Chaos Theory in Economics: a Historical Perspective*
- Burton G. Malkiel, Reflections on the Efficient Market Hypothesis: 30 Years Later, *The Financial Review* 40 (2005) 1-9
- Burton G. Malkiel, The Efficient Market Hypothesis and Its Critics, *The Journal of Economic Perspectives*, Vol. 17, No. 1 (Winter, 2003), pp. 59-82
- C. W. J. Granger – T. Teräsvirta, 1996, *Modeling nonlinear economic relationships*, Oxford University Press
- Chang Su, Application of EGARCH Model to Estimate Financial Volatility of Daily Returns: The empirical case of China
- Chris Brooks, 2008, *Introductory Econometrics for Finance*, Cambridge University Press
- D. Sornette and V.F. Pisarenko, Properties of a Simple Bilinear Stochastic Model: Estimation and Predictability
- David M. Walker - Glenn Marion, 2005, *Selecting nonlinear stochastic process rate models using information criteria*, Elsevier Ltd.
- Dek Terrell – Thomas F. Fomby, 2006, *Econometric analysis of financial and economic time series*, Elsevier Ltd.
- Elroy Dimson and Massoud Mussavian, A brief history of market efficiency, *European Financial Management*, Volume 4, Number 1, March 1998, pp. 91-193
- Enrico Foscolo, *Analysis of Financial Time Series with EViews*
- Gerald P. Dwyer, Jr., 2003, *Nonlinear Time Series and Financial Applications*, Federal Reserve Bank of Atlanta
- James D. Hamilton, 1994, *Time Series Analysis*, Princeton University Press
- John H. Cochrane, 1997, *Time Series for Macroeconomics and Finance*
- Jorge Belaire-Franch - Dulce Contreras-Bayarri, *The BDS Test: A Practitioner's Guide*, University of Valencia
- José A. Scheinkman and Blake LeBaron, Nonlinear Dynamics and Stock Returns, *The Journal of Business*, Vol. 62, No. 3 (Jul., 1989), pp. 311-337
- K.P. Lim, Model Identification Of ARCH/GARCH Using Non-Linearity Tests
- M. C. Lineesh, K. K. Minu and C. Jessy John, Analysis of Nonstationary Non-linear Economic Time Series of Gold Price A Comparative Study, *International Mathematical Forum*, 2010
- Neville Davies and Joseph D. Petrucci, 1986, Detecting Non-Linearity in Time Series, *Journal of the Royal Statistical Society. Series D (The Statistician)*, Vol. 35, No. 2

- Patrick Kuok Kun Chu, Using BDS statistics to detect nonlinearity in time series, University of Macau, Faculty of Business Administration
- Paul Krugman, 2009, How Did Economists Get It So Wrong?
- Philip Hans Franses – Dick van Dijk, 2000, Non-linear time series models in empirical finance, Cambridge University Press
- R. M. Goodwin, The Nonlinear Accelerator and the Persistence of Business Cycles, *Econometrica*, Vol. 19, No. 1 (Jan., 1951), pp. 1-17
- Rama Cont, 2005, Volatility Clustering in Financial Markets: Empirical Facts and Agent-Based Models, To appear in: A Kirman & G Teyssiere (eds.): Long memory in economics, Springer
- Ruey S. Tsay, 2005, Analysis of financial time series, John Wiley & Sons, Inc.
- Simon M. Potter, 1999, Nonlinear Time Series Modeling: An Introduction
- Willem Buiter, 2009, The unfortunate uselessness of most 'state of the art' academic monetary economics
- Αναγνώστου Αγγελική, 2002, Modelling the Dynamic Behaviour of the Greek Stock & Foreign Exchange Markets: A Nonlinear Time Series Approach, University of Sheffield
- Κάτος Αναστάσιος, 2004, Οικονομετρία: Θεωρία και εφαρμογές, Εκδόσεις Ζυγός
- Χάλκος Γεώργιος, 2006, Οικονομετρία: Θεωρία και Πράξη, Β. Γκιούρδας Εκδοτική

Διαδικτυακές πηγές

- <http://epp.eurostat.ec.europa.eu>
- <http://finance.yahoo.com>
- <http://www.eviews.com>
- <http://www.stockwatch.com.cy>